**Простейший поток вызовов**

1. **Определение**

Простейшим потоком называется стационарный ординарный поток без последействия. Простейший поток вызовов является наиболее распространенной моделью реального потока вызовов, применяемой в системах массового обслуживания, в том числе в теории телетрафика. Действительно, как отмечалось при рассмотрении принципов классификации потоков вызовов, поток телефонных вызовов от большой группы абонентов характеризуется отсутствием последействия. Его можно считать ординарным, а при ограничении исследуемого промежутка времени 1–3 ч и стационарным. Аналогичные случайные потоки событий характерны для многих отраслей народного хозяйства.

1. **Математическая модель простейшего потока**

Определим вероятности поступления точно k(k=0, 1, 2, ...) вызовов на отрезке времени [t0, t0+t): pk(t0, t0+t). Исследования будем проводить на отрезке времени [t0, t0+t+τ), который можно представить состоящим из двух примыкающих друг к другу отрезков: [t0, t0+t+τ)=[t0,+t0+t)+[t, t+τ).

Для того чтобы в течение отрезка [t0, t0+t+τ) поступило точно kвызовов, необходимо, чтобы за первый промежуток времени [t0, t0+t) поступило k, или k–1, ..., или k–i, ..., или 0 вызовов и соответственно за второй промежуток 0, или 1, ..., или i, ..., или kвызовов.

Введем обозначения: pk(t0, t0+t+τ) – вероятность поступления точно kвызовов за отрезок времени [t0, t0+t+τ); p k-i(t0, t0+t) – вероятность поступления точно k–i вызовов за первый отрезок времени [t0, t0+t); pi(t, t+τ) – вероятность поступления точно i вызовов за второй отрезок времени [t, t+τ). Согласно определению простейший поток является стационарным. Из этого следует, что вероятности поступления того или иного числа вызовов за отрезки времени [t0, t0+t+τ), [t0, t0+t), [t, t+τ) не зависят от моментов начала отсчета времени, а зависят только от длины отрезков времени. Поэтому упростим обозначения как отрезков времени, так и вероятностей: [t0, t0+t+τ) будем обозначать [t+τ); [t0, t0 + t) – [t); [t, t+τ) – [τ) и соответственно pk(t0, t0+t+τ) – pk(t+τ); pk-i(t0,t0+t)–pk-i(t); pi(t, t+τ) – pi(τ).

Простейший поток является потоком без последействия. Поэтому независимыми являются события, заключающиеся в поступлении какого-либо числа вызовов за первый и второй промежутки времени, и вероятность поступления точно kвызовов за время [t+τ) для каждой реализации i=0, 1, ..., kсоставляет pk(t+τ)i=pk-i(t) pi(τ), i=0, 1, ..., k. Поскольку реализации с i=0, 1, ..., kпредставляют несовместимые события, то согласно формуле полной вероятности имеем



Выражение (2.13) представляет собой систему, состоящую из бесконечного числа уравнений. Устремим отрезок времени τ к нулю. Вследствие ординарности простейшего потока π2(t, t+τ)=o(t), τ→0. Тем более вероятности поступления точно 2, 3, ... вызовов . p2(τ), p3(τ), ... . есть бесконечно малые более высокого порядка по отношению к τ. Следовательно, в системе ур-ний (2.13) вероятности pi имеют конечные значения только при i, равном 0 и 1. На основании этого (2.13) преобразуются к виду



Определяем вероятности p1(τ) и p0(τ):



С учетом (2.10) и (2.6)



(π0(τ) . вероятность поступления 0 и более вызовов, т. е. вероятность достоверного события, она равна 1).

Подставим в систему ур-ний (2.14) полученные значения вероятностоей p1(τ) и p0(τ). Затем, перенеся в левую часть уравнений pk(t), поделим левые и правые части уравнений на τ. Переходя к пределу, получим



Решив систему дифференциальных ур-ний (2.16), получим формулу Пуассона



Таким образом, вероятность поступления точно kвызовов простейшего потока за отрезок времени tопределяется формулой Пуассона. По этой причине простейший поток также называют стационарным пуассоновским потоком.

1. **Основные характеристики простейшего потока**

При объединении п независимых простейших потоков с параметрами λ1, λ2, ..., λnобразуется общий простейший поток с параметром λ1+λ2+...+λn. Вероятность поступления точно kвызовов за отрезок времени tопределяется формулой Пуассона



Можно также показать, что объединение большого числа независимых стационарных ординарных потоков с практически любым последействием при малых значениях параметров этих потоков создает общий поток, близкий к простейшему. Если каждый из потоков поступает от отдельных источников вызовов, то простейший поток можно представить как поток от бесконечного числа источников, параметр каждого из которых стремится к нулю.

Сумма вероятностей всех возможных значений числа поступающих вызовов за рассматриваемый промежуток времени tравна 1. Действительно,



Функция pk(t) есть функция распределения дискретной случайной величины К. Из (2.17) следует, что она зависит от λtи k, а при t=1 – от λ и k.

Как и для любой дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона, математическое ожидание М(К), дисперсия D(K) и среднеквадратическое отклонение σ(К) числа вызовов простейшего потока, поступающих за отрезок времени t, равны



Из этого следует, что интенсивность простейшего потока равна его параметру µ=М(К)=λ. Равенство µ=λ справедливо не только для простейшего потока, но и для любого стационарного ординарного потока.



Характер зависимости pk(t) от kпри λt=const (λt= 5) показан на рис. 2.1. Влияние λtна характер этой зависимости иллюстрируется рис. 2.2. На нем приведены огибающие значений функции pk(t) при λt=1, 5 и 10. С возрастанием величины λt(при t=1 с возрастанием параметра потока) огибающие кривые принимают все более симметричный вид, приближаясь к нормальному закону распределения непрерывной случайной величины. При λt=10 имеет место хорошее совпадение огибающей значений pk(t) с нормальным законом распределения (пунктирная кривая).

Вероятность поступления kи более вызовов определяется по формуле



Вероятности pk(t) и pi≥k(t) для различных значений k и λt табулированы [29]. Представляет практический интерес также зависимость pi≤k(t) от k при λt.const. Огибающие кривые значений pi≤k(t) такой зависимости представлены на рис. 2.3 при λt=1, 5 и 10. При этом pi≤k(t) определяется по таблицам pi≥k(t) с учетом того, что pi≤k(t)=1 - pi≥k(t).

**4.Функция**F(z) **распределения вероятностей промежутков**

 **времени между вызовами**

Согласно определению функция F(z) равна вероятности того, что промежуток времени между вызовами Zбудет меньше заданного промежутка z, что равносильно вероятности щ(г) того, что за промежуток zпоступит один и более вызовов. Используя (2.17), получим



а плотность распределения вероятностей промежутков времени между вызовами



Таким образом, распределение промежутков времени между вызовами простейшего потока подчиняется показательному (отрицательному экспоненциальному) закону. Функция F(z) зависит от параметра потока λ.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение промежутка времени между вызовами zсоставляют:



Из (2.24) и (2.26) следует равенство M(Z)=σ(Z). Такое равенство характерно при показательном законе распределения любой случайной величины. Формула (2.24) показывает, что с увеличением параметра потока λ уменьшается математическое ожидание промежутка времени между вызовами M(Z). Указанное иллюстрируется рис. 2.4, на котором приведены зависимости F(z) от z при λ=1, 5 и 10. Из этих кривых видно, что с возрастанием λ увеличивается вероятность того, что промежуток между вызовами меньше заданного отрезка времени z.



Распределение промежутков времени между вызовами по показательному закону (2.22) является не только необходимым, но и достаточным условием простейшего потока. Можно показать (доказательство не приводится), что поток с независимыми промежутками между вызовами, распределенными по одинаковому показательному закону (2.22), является простейшим потоком.

Показательный закон обладает следующим свойством: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка. Для доказательства предположим, что промежуток времени между вызовами равен t. Найдем условную вероятность того, что он будет продолжаться еще не менее времени τ. На основании теоремы умножения вероятностей можно записать P(Z>t+τ)=P(Z>t)P(Z>τ/Z>t). С учетом (2.22) e–λ(t+τ)=e–λtP(Z>τ/Z>t), откуда условная вероятность P(Z>τ/Z>t)=e–λτ=P(Z>τ), т. е. она не зависит от уже длившейся части времени обслуживания и равна безусловной вероятности P(Z>τ), что и требовалось доказать.

Показательный закон – единственный, обладающий таким свойством. Это свойство показательного закона представляет собой, в сущности, другую формулировку основного свойства простейшего потока вызовов – отсутствия последействия. Такое замечательное свойство показательного распределения позволяет упростить математические преобразования, в частности, при анализе процессов поступления потоков вызовов и их обслуживания.

**1.2. Простейший поток вызовов**

Пусть на вход системы распределения информации поступает однородный поток событий, различающихся только моментами появления. Такой поток можно изобразить как последовательность точек с интервалами  на числовой оси (рис. 1.2)

 

Рис. 1.2. Случайный поток событий

Для случайного потока событий можно выделить следующие свойства:

1. Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной *τ* зависит только от длины этого участка и не зависит от его расположения на оси  .

2. Поток событий называется потоком без последействия, если для любых не

перекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий попадающих на другой.

3. Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Если поток вызовов обладает всеми тремя свойствами, то он называется простейшим или стационарным пуассоновским потоком.

Рассмотрим на оси простейший поток как неограниченную последовательность случайных точек. Выделим произвольный участок времени длиной . При выполнении условий 1-3 число точек, попадающих на участок , распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

*α = λτ,*

где *λ*- плотность потока (среднее число вызовов, приходящихся на единицу времени). Соответственно вероятность того, что за время произойдет ровно событий, равна

.

В частности, вероятность того, что участок окажется пустым (не придет ни одного вызова), будет

.

Наряду с распределением Пуассона при решении практических задач используют вероятности поступления не менее вызовов за время

,

и вероятность поступления не более вызовов за промежуток

.

Распределение вероятностей показано на рис. 1.3.

Рис. 1.3. Зависимости вероятности от промежутка времени

Рассмотрим простой пример применения приведенных формул. Допустим, требуется рассчитать вероятность поступления пяти, не менее пяти и не более пяти вызовов за промежуток , если параметр простейшего потока вызовов/ч. Определяем, что и по формулам находим , . На основе полученных результатов вычисляем вероятность поступления не менее пяти заявок: .

Важной характеристикой потока является закон распределения длины промежутка между соседними событиями. Рассмотрим СВ - время между двумя произвольными соседними заявками в простейшем потоке и найдем ее функцию распределения

.

Перейдем к вероятности противоположного события

. (1.1)

Но это вероятность отсутствия вызовов за время . Следовательно

.

Подставляя данное выражение в (1.1), получаем функцию распределения

, .

Дифференцируя функцию распределения, получим ПРВ:

, .

График полученной ПРВ представлен на рис. 1.4.

Рис. 1.4. ПРВ Пуассона

Математическое ожидание величины

,

а дисперсия

, .

Показательный закон распределения времени между двумя соседними заявками имеет одно важное свойство. Оно состоит в следующем: если промежуток времени уже длился некоторое время , то это никак не повлияет на закон распределения оставшейся части промежутка. То есть предыдущая информация о том, когда и сколько вызовов поступало за время , не влияет на закон распределения поступающих вызовов в «будущем». Таким образом, поток заявок с показательным законом распределения времени является потоком без последействия.

Простейший поток обладает следующими свойствами:

1. При объединении нескольких простейших потоков с интенсивностями образуется простейший поток с интенсивностью .

2. Сумма большого числа независимых стационарных потоков с практически любым последействием при малых значениях интенсивностей этих потоков дает простейший поток.