*ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН*

*ДОНИШГОЊИ ТЕХНИКИИ ТОЉИКИСТОН*

*ба номи академик М. С. Осимї*

*Факултети «Технологияњои информатсионї ва коммуникатсионї»*

*Кафедраи «Шабакањои алоќа ва системањои коммутатсионb»*

*ҲИСОБОТ*

*Оид ба кори амалии №1*

*Аз фанни: «Системањои документалии электроалоќа»*

*Мавзўъ: «Модели систем массового обслуживания»*

|  |  |
| --- | --- |
| ***Иҷро кард:*** | *Донишҷуи курси 4-юм*  *гурўҳи 450103-02 А*  *Одинаев Н.Х.* |
| ***Қабул кард:*** | *Муаллими калони кафедра*  *Қаламов А.Қ* |

***Душанбе -2021 с.***

***Модели систем массового обслуживания.***

Это основной раздел теории, на который опираются все положения теории телетрафика. Чтобы понять методы анализа систем массового обслуживания, необходимо изучить новый математический аппарат.

**Математическое введение в теорию цепей Маркова. (Markov’s chain )**

***Дискретные цепи Маркова.***

Будем говорить, что задана дискретная цепь Маркова, если для последовательности случайных величин выполняется равенство

.

Это означает, что поток случайных величин определяется только вероятностью перехода от предыдущего значения случайной величины к последующему. Зная начальное распределение вероятностей, можно найти распределение на любом шаге. Величины *in*можно интерпретировать как номера состояний некоторой динамической системы с дискретным множеством состояний (типа конечного автомата). Если вероятности переходов не зависят от номера шага, то такая цепь Маркова называется ***однородной*** и ее определение задается набором вероятностей .

Для однородной Марковской цепи можно определить вероятности перехода из состояния *i*  в состояние *j* за *m* шагов



Цепь Маркова называется **неприводимой**, если каждое ее состояние может быть достигнуто из любого другого состояния. Состояние *i* называется поглощающим, если для него *pii* =1.

Состояние называется **возвратным**, если вероятность попадания в него за конечное число шагов равна единице. В другом случае состояние относится к **невозвратным**. Возвратное состояние может быть **периодическим** и **апериодическим** в зависимости от наличия кратных шагов возврата. Введем вероятности возврата в состояние *i* через *n* шагов после ухода из этого состояния: 

Они позволяют определить среднее число шагов или, иначе говоря, среднее время возврата:.

Состояние называется **возвратным нулевым**, если среднее время возвращения в него равно бесконечности, и **возвратным ненулевым**, если это время конечно. Известны две важные теоремы:

**Теорема 1.**

Состояния неприводимой цепи Маркова либо все невозвратные, либо все возвратные нулевые, либо все возвратные ненулевые. В случае периодической цепи все состояния имеют один и тот же период.

Вторая теорема рассматривает вероятности достижения состояний в стационарном (то есть не зависящем от начального распределения вероятностей) режиме. Соответствующее распределение вероятностей также называют стационарным. Нахождение стационарного распределения вероятностей достижения состояний одна из основных задач теории телетрафика.

**Теорема 2.**

Для неприводимой и апериодической цепи Маркова всегда существуют предельные вероятности, не зависящие от начального распределения вероятностей. Более того, имеет место одна из следующих двух возможностей:

**А)** все состояния цепи невозвратные или все возвратные нулевые, и тогда все предельные вероятности равны нулю и стационарного состояния не существует;

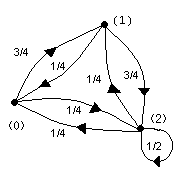
**Б)** все состояния возвратные ненулевые и тогда существует стационарное распределение вероятностей:



Состояние называется **эргодическим**, если оно апериодично и возвратно ненулевое. Если все состояния цепи Маркова ***эргодичны***, то вся цепь называется ***эргодической***. Предельные вероятности эргодической цепи Маркова называют вероятностями состояния равновесия, имея в виду, что зависимость от начального распределения вероятностей полностью отсутствует.

Цепь Маркова с конечным числом состояний (конечная цепь), удобно изображать в виде ориентированного графа, называемого диаграммой переходов (рис.1.5). Вершины графа ассоциируются с состояниями, а ребра с вероятностями переходов.

Вычисления вероятностей достижения состояний производится прямыми методами или с помощью z-преобразования.



*Рис. 1.5 Цепь Маркова.*

Введем матрицу вероятностей переходов и вектор-строку вероятностей на шаге *n*

.

Распределение вероятностей на произвольном шаге тогда будет подчиняться матричному соотношению:

.

Оно позволяет рекуррентно вычислять все вероятности состояний. Для нахождения предельного распределения (стационарного) нужно решить уравнение:



Его можно решать как систему линейных алгебраических уравнений, если цепь конечна.

Для примера, показанного на рис.1.5, имеем:

.

и решение матричного уравнения сводится к решению системы трёх уравнений:



Коэффициенты первого уравнения в этой системе дополняют до единицы сумму коэффициентов второго и третьего уравнений; это свидетельствует о линейной зависимости между ними. Поэтому для решения системы уравнений нужно ввести дополнительное нормирующее условие. В данном примере: .

Решая систему полученных уравнений, имеем:



Уравнение для вероятности достижения состояния в переходном режиме решить значительно труднее. Некоторого упрощения можно достигнуть, используя *z* – преобразование. Применим его к уравнению для переходных вероятностей

.

Обозначая соответствующие преобразования, получим: 

Все полученные здесь математические результаты относились к однородным Марковским процессам, где вероятности переходов не зависят от времени. В более общем случае такая зависимость имеет место.

Рассмотрим вероятности перехода системы из состояния *i*  на *m*-том шаге в состояние *j* на *n*-том шаге для *n* > *m*.

Можно показать, что эти вероятности связаны между собой, так называемым уравнениями **Чепмена-Колмогорова**.(*Chapman - Kolmogorov*)

.

Для однородных цепей Маркова эти уравнения упрощаются так как

.

И сводятся к анализируемым выше.

***Непрерывные цепи Маркова.***

Случайный процесс *X(t)* с дискретным множеством значений образует непрерывную цепь Маркова, если

.

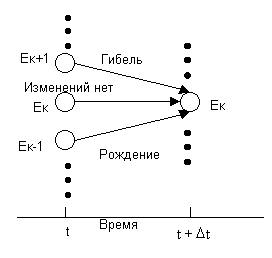
Будущие состояния зависят от прошлого только через текущее состояние. Для непрерывный цепей Маркова основным также является уравнение Чепмена –Колмогорова, для однородной цепи имеющее вид: .

Здесь матрица **H***(t)*= [ *pij(t)*] - матрица вероятностей перехода из состояния *i* в состояние *j*  в момент времени *t* , а матрица **Q** называется матрицей интенсивностей переходов. Ее элементы имеют следующий смысл: если в момент времени *t* система находилась в состоянии *Ei*, то вероятность перехода в течение промежутка времени (*t,t+Δt*) в произвольное состояние *Ej* задается величиной *qij(t)Δt* + *o(Δt),* а вероятность ухода из состояния *Ei*  величиной *-qiiΔt* + *o(Δt).*

Таким образом, интенсивности переходов можно вычислять как соответствующие пределы при стремлении к нулю длительности временного интервала.

Наиболее важным для дальнейшего использования является класс непрерывных цепей Маркова называемых **«процессами гибели - размножения»(***Birth – death process***).** Для таких систем из состояния *k* возможны переходы только в состояния *k*, *k*-1 и *k*+1 в следующие моменты времени:

* в момент *t* объем популяции был равен *k* и в течение времени (*t,t+Δt*) не произошло изменения состояния
* в момент *t* объем популяции был равен *k*-1 и в течение времени (*t,t+Δt*) родился один член популяции
* в момент времени *t* объем популяции был равен *k*+1 и в течение времени (*t,t*+*Δt*) погиб один член популяции



*Рис. 1.6. Возможные переходы в состояние Ек*.

Будем искать вероятность того, что в момент времени *t* объем популяции равен *k* , обозначив его *Pk(t).* Можно записать соотношения для вероятности достижения со­стояния *k* в момент времени *t+Δt*:

.

Определим граничные и нормирующие условия:



Выразим вероятности переходов за интервал *Δt* через интенсивности

Вер(+1)=*λkΔt*+*o(Δt)* ; Вер(-1)=*μkΔt*+*o(Δt)*.

Вероятность нуля рождений 1- *λkΔt*+*o(Δt)* , а нуля гибелей 1- *μkΔt*+*o(Δt).*

Таким образом, вероятность того, что состояние *k* сохранится неизменным, будет равно произведению [1- *λkΔt*+*o(Δt*)][ 1- *μkΔt*+*o(Δt*)].

Тогда ***уравнения Чепмена-Колмогорова*** приобретают вид



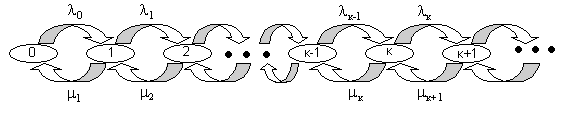
Раскрывая скобки и проводя деление на *Δt*, получим:



В пределе получается система дифференциально-разностных уравнений, решение которой будут играть важную роль для практических задач.



В соответствие этой системе уравнений можно поставить наглядную диаграмму интенсивностей переходов, которая аналогична диаграмме переходов для дискретных цепей Маркова (Рис 1.7.)



*Рис.1.7. Диаграмма интенсивностей переходов для процесса размножения и гибели.*

Овалам здесь соответствуют дискретные состояния, а стрелки определяют интенсивности потоков вероятности (а не вероятности!) переходов от одного состояния к другому.

Имеет место своеобразный «**закон сохранения**»:

Разность между суммой интенсивностей, с которой система попадает в состояние *k* и суммой интенсивностей, с которой система покидает это состояние должна равняться интенсивности изменения потока в это состояние (производной по времени).

Применение закона сохранения позволяет получать уравнения для любой подсистемы Марковской цепи типа процесса «гибели-размножения». Особенно эффективным оказывается построение решений в стационарном, установившемся режиме, когда можно полагать что вероятности в произвольный, достаточно отдаленный момент времени, остаются постоянными.

Приравнивая производную по времени нулю, получаем систему разностных уравнений



Полагая, что интенсивности *λ-1* =*λ-2* = *λ-3* =…0; *μ0* = *μ-1* = *μ-2* = *μ-3* =…=0, второе уравнение выписывать отдельно далее не потребуется. Итак, стационарный режим в цепи Маркова будет описываться системой разностных уравнений и условием нормировки для вероятностей



Нетрудно видеть, что эти уравнения легко выводятся из закона сохранения интенсивностей вероятностей. В стационарном режиме разность потоков равна нулю и полученные выше уравнения приобретают смысл уравнений равновесия или баланса, как их и называют.

.

Интенсивность потока вероятностей ***в*** состояние *k* равна интенсивности потока ***из*** этого состояния.

Решать уравнение баланса можно, сначала определив при *k* =0 значение

.

Затем, построив систему уравнений для *k* =1, можно получить .

Далее получаем



Из условия нормировки: .

Система, описываемая полученными выше выражениями, будет иметь стационарные вероятности состояний, когда она эргодическая. Это условие может быть выражено через соотношение интенсивностей. Необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое значение *k* , начиная с которого выполнялось неравенство

.

Для большинства реальных систем массового обслуживания это неравенство выполняется.

**Классификация систем массового обслуживания.**

Используется трех -, четырех -, шести – компонентное символическое обозначение системы массового обслуживания, предложенное Кендаллом (Candall) и развитое в работах Г.П.Барашина.

**a/b/c :d/e/f**

**a –** распределение поступающего потока запросов.

**b** – закон распределения времени обслуживания.

Типовые условные обозначения:

**М** – экспоненциальное (Марковское) распределение,

**D** – детерминированное распределение,

**Ek** – эрланговское распределение k-го порядка,

**HMk** – гиперэкспоненциальное,

**HEk** – гиперэрланговское распределение порядка k,

**GI** – произвольное распределение независимых промежутков между заявками,

**G** – произвольное распределение длительностей обслуживания.

**c –** структура системы обслуживания (обычно число серверов).

**d –** дисциплина обслуживания (параметры после двоеточия иногда опускают).

Обычно используется сокращенное символическое обозначение, например FF вместо FIFO, LF, PR и т.п.

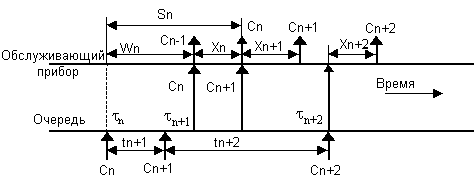
**e –** максимальное число запросов, воспринимаемое системой, может употребляться символ ∞.

**f –** максимальное число запросов к системе обслуживания.

В некоторых публикациях последними символами отражают качественные характеристики системы обслуживания. Некоторые общие результаты и основы математического аппарата, необходимого для анализа можно получить, рассматривая системы **G/G/m**.

**Формула Литтла (Little).**

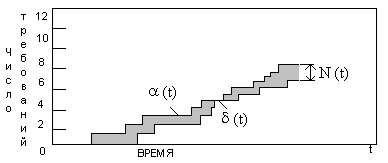
Рассмотрим временную диаграмму работы системы массового обслуживания (рис. 1.8), отразив на ней последовательность поступления требований, помещение требований в очередь и обработки серверами системы.



*Рис. 1.8 Временная диаграмма работы системы массового обслуживания.*

В общем случае ясно, что с увеличением числа требований растет время ожидания. Установим соотношение между средним числом требований в системе, интенсивностью потока и среднего времени пребывания в системе. Обозначим число поступающих в промежутке времени *(0 , t)* требований как функцию времени ***α(t).***

Число исходящих из системы заявок (обслуженных) на этом интервале обозначим ***δ(t).*** На рисунке 1.9 показаны примеры функциональных зависимостей этих двух случайных процессов от времени.



*Рис. 1.9 Зависимость между средним числом требований в системе, интенсивностью потока и средним времени пребывания в системе.*

Число требований, находящихся в системе в момент *t* будет равно:

.

Площадь между двумя рассматриваемыми кривыми от 0 до *t* - дает общее время, проведенное всеми заявками в системе за время *t.*

Обозначим эту накопленную величину *γ(t)* . Если интенсивность входного потока равна *λ*, а средняя интенсивность за время *t:* ,то время, проведенное одной заявкой в системе, усредненное по всем заявкам будет равно:

.

Наконец, определим среднее число требований в системе в промежутке (0,t):

.

Из последних трех уравнений следует, что: , (где ).

Если в СМО существует стационарный режим, то при *t*→ *∞* , будут иметь место соотношения:





Последнее соотношение означает, что среднее число заявок в системе равно произведению интенсивности поступления требований в систему на среднее время пребывания в системе. При этом не накладывается никаких ограничений на распределения входного потока и времени обслуживания. Впервые доказательство этого факта дал Дж.Литтл и это соотношение носит название **формула Литтла.**

Интересно, что в качестве СМО можно рассмотреть только очередь из заявок в буфере. Тогда формула Литтла приобретает иной смысл - средняя длина очереди равна произведению интенсивности входного потока заявок на среднее время ожидания в очереди: .

Если наоборот рассматривать СМО только как серверы, то формула Литтла дает:

,

где  – среднее число заявок в серверах, а ******– среднее время обработки в сервере.

В любом случае: .

Одним из основных параметров, которые используются при описании СМО, является ***коэффициент использования (utilization factor)***. Это фундаментальный параметр, так как он определяется как отношение интенсивности входного потока к пропускной способности системы. Поскольку пропускная способность СМО содержащей *m* серверов может быть определена как: , то коэффициент использования может быть определен как:

.

Нетрудно видеть, что коэффициент использования равен в точности интенсивности нагрузки, если СМО с одним сервером и в *m* раз меньше для систем с *m* серверами. Величина коэффициента использования равна среднему значению от доли занятых серверов и .

Если в СМО типа **G/G/1** существует стационарный режим и можно определить вероятность того, что в некоторый случайный момент сервер будет свободный, то

.

Чтобы рассмотреть более тонкие результаты теории телетрафика нам понадобится ряд математических моделей.

Теперь перейдем к рассмотрению самой простой из задач анализа СМО – рассмотрим систему типа **M/M/1**.